

APPLIED MATHEMATICS - III

Time : 2:30 Hours]

[Maximum Marks : 50

NOTES :

- i) Attempt **all** questions.
- ii) Students are advised to specially check the Numerical Data of question paper in both versions. If there is any difference in Hindi Translation of any question, the students should answer the question according to the English version.
- iii) Use of Pager and Mobile Phone by the students is not allowed.

Q1) Answer any ten parts of the following. From parts a to f select the correct choice.

[10×1=10]

- a) If $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ then value of x and y are
- i) $x = 20, y = 14$
 - ii) $x = 14, y = 20$
 - iii) $x = 16, y = 12$
 - iv) $x = 18, y = 10$
- b) If $z = \log(x^2 + y^2)$ then the value of $\frac{\partial z}{\partial y}$ is
- i) $\frac{x+y}{x^2+y^2}$
 - ii) $\frac{2x}{x^2+y^2}$
 - iii) $\frac{2y}{x^2+y^2}$
 - iv) None
- c) If $\vec{r} = \cos nt \hat{i} + \sin nt \hat{j}$, where n is a constant, then
- i) $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = n^2 \vec{r}$
 - ii) $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -n^2 \vec{r}$
 - iii) $\frac{d^2 r}{dt^2} = n\vec{r}$
 - iv) None
- d) The value of $\text{div } \vec{r}$ is
- i) 2
 - ii) 3
 - iii) 1
 - iv) None
- e) The order and Degree of the differential equation are $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2 - xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$.
- i) 3, 2
 - ii) 2, 3
 - iii) 3, 3
 - iv) None
- f) The solution of the differential equation $(1+x^2) dy = (1+y^2) dx$ is
- i) $\frac{y+x}{1-yx} = a$ (constant)
 - ii) $\frac{y+x}{1+yx} = a$ (constant)
 - iii) $\frac{y-x}{1+yx} = a$ (constant)
 - iv) None
- g) Solve the differential equation $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0$.
- h) Find the Laplace Transform of $F(t) = e^{at}$.
- i) Find the inverse Laplace Transform of $\left\{ \frac{s}{(s^2+1)^2} \right\}$.
- j) Find the value of $\int_0^1 x^5 (1-x)^6 dx$.
- k) Find the Fourier Sine Transform of $\left(\frac{1}{x}\right)$.
- l) If in a bag there are 8 white balls and 6 red balls, then find the probability of two balls of the same colour.

Q2) Answer any five parts of the following.

- Define Diagonal and Scaler Matrices.
- If $x = r \cos \theta$ and $y = r \sin \theta$, then prove that $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\theta = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)y$.
- If $u = \log \frac{x^4 + y^4}{x + y}$, prove that $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3$.
- Verify Cayley Hamilton Theorem from $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Find inverse A^{-1} from the Theorem.
- If $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, find the value of $\partial \left(\frac{x, y}{r, \theta} \right)$.
- Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3 - 3$.
- Find the value of $\sqrt{-\frac{3}{2}}$.

Q3) Answer any two parts of the following:

[2×5=10]

- If Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ and I is unit matrix then find the value of $A^2 - 3A + 9I$.
- Solve the differential equation $(1+x)(1-y) \frac{dy}{dx} + xy = 0$.
- If $x = u(1+v)$ and $y = v(1+u)$, find $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

Q4) Answer any two parts of the following:

[2×5=10]

- Find the Fourier series for the function $f(x)$

$$\text{where } f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{for } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{for } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$\text{and show that } \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

- For what value of k , system of the equations is consistent?
 $3x - y + kz = 1$, $2x + y + z = 2$, $x + 2y - kz = -1$
- Solve the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = e^{4x}$$

Q5) Answer any two parts of the following:

[2×5=10]

- If $\vec{f} = \hat{i}(x+y+1) + \hat{j} + k(-x-y)$, prove that $\vec{f} \cdot \text{curl } \vec{f} = 0$.
- The positions of two particles are given by the equations $s_1 = t^3 - 1$ and $s_2 = 6t^2 - t^3$. Find their velocities when their accelerations are same.
- If mean and standard deviation of normal distribution are 40 and 4 respectively, then find the probability of standard distribution for $35 < x < 45$.

(हिन्दी अनुवाद)

- नोट : i) सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये।
ii) परीक्षार्थियों को सलाह दी जाती है कि वे प्रश्न-पत्र के दोनों अनुवादों में सांख्यिकीय आँकड़ों का विशेष रूप से मिलान कर लें। यदि हिन्दी अनुवाद के किसी प्रश्न में किसी प्रकार की भिन्नता है, तो परीक्षार्थी अंग्रेजी अनुवाद के अनुसार प्रश्न का उत्तर दें।
iii) परीक्षार्थियों द्वारा पेज़र और मोबाइल फोन का प्रयोग अनुमन्य नहीं है।

प्र.1) निम्नलिखित में से कोई दस भाग हल करें। भाग अ से न तक सही विकल्प चुनिये।

[10×1=10]

अ) यदि $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ तो x तथा y के मान होंगे।

- i) $x=20, y=14$ ii) $x=14, y=20$
iii) $x=16, y=12$ iv) $x=18, y=10$

ब) यदि $z = \log(x^2 + y^2)$ तो $\frac{\partial z}{\partial y}$ का मान होगा।

- i) $\frac{x+y}{x^2+y^2}$ ii) $\frac{2x}{x^2+y^2}$
iii) $\frac{2y}{x^2+y^2}$ iv) कोई नहीं

स) यदि $\vec{r} = \cos nt \hat{i} + \sin nt \hat{j}$, जहाँ n एक अचर है, तो

- i) $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = n^2 \vec{r}$ ii) $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -n^2 \vec{r}$
iii) $\frac{d^2 r}{dt^2} = n\vec{r}$ iv) कोई नहीं

द) $\text{div } \vec{r}$ का मान होगा -

- i) 2 ii) 3
iii) 1 iv) कोई नहीं

य) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2 - xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$ की कोटि (order) तथा घात (Degree) के मान होंगे -

- i) 3, 2 ii) 2, 3
iii) 3, 3 iv) कोई नहीं

र) समीकरण $(1+x^2) dy = (1+y^2) dx$ का हल होगा।

- i) $\frac{y+x}{1-yx} = a$ (अचर) ii) $\frac{y+x}{1+yx} = a$ (अचर)
iii) $\frac{y-x}{1+yx} = a$ (अचर) iv) कोई नहीं

ल) अवकल समीकरण $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0$ का हल ज्ञात करो।

व) फलन $F(t) = e^{at}$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करो।

त) $\left\{ \frac{s}{(s^2+1)^2} \right\}$ का प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करो।

थ) $\int_0^1 x^5(1-x)^6 dx$ का मान ज्ञात करो।

ध) फलन $\left(\frac{1}{x}\right)$ का फोरियर साइन रूपान्तरण ज्ञात करो।

न) किसी थैले में 8 सफेद तथा 6 लाल गेंदें हैं। एक ही रंग की दो गेंद निकलने की प्रायिकता ज्ञात करो।

प्र.2) निम्नलिखित में से कोई पांच भाग हल कीजिए :

- अ) विकर्ण (Diagonal) तथा अदिश (Scalar) आव्यूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।
- ब) यदि $x = y \cos \theta$ और $y = r \sin \theta$ तो सिद्ध करो कि $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\theta = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)y$
- स) यदि $u = \log \frac{x^4 + y^4}{x+y}$ तो सिद्ध करो कि $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3$.
- द) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए। इसकी सहायता से A^{-1} का मान ज्ञात करें।
- य) यदि $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ तो $\partial \left(\frac{x, y}{r, \theta}\right)$ का मान ज्ञात करें।
- र) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3 - 3$ को हल करें।
- ल) $\sqrt{-\frac{3}{2}}$ का मान ज्ञात करें।

प्र.3) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिए :

[2×5=10]

- अ) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ है और I इकाई आव्यूह है तो $A^2 - 3A + 9I$ का मान ज्ञात करें।
- ब) अवकल समीकरण $(1+x)(1-y) \frac{dy}{dx} + xy = 0$ को हल करें।
- स) यदि $x = u(1+v)$ और $y = v(1+u)$ तो $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ का मान ज्ञात करें।

प्र.4) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल करें :

[2×5=10]

- अ) आवर्ती फलन $f(x)$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करें जहां $f(x) = \begin{cases} -\pi, \text{जब } -\pi < x < 0 \\ x, \text{जब } 0 < x < \pi \end{cases}$
- अतः सिद्ध करें कि $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$
- ब) k के किस मान के लिए निम्न समीकरण समूह संगत (consistent) हैं?
 $3x - y + kz = 1, 2x + y + z = 2, x + 2y - kz = -1$
- स) अवकल समीकरण को हल करें।

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = e^{4x}$$

प्र.5) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल करें :

[2×5=10]

- अ) यदि $\vec{f} = \hat{i}(x+y+1) + \hat{j} + k(-x-y)$ हो तो सिद्ध करो कि $\vec{f} \cdot \text{curl } \vec{f} = 0$.
- ब) यदि दो कणों (particles) की स्थितियां समीकरण $s_1 = t^3 - 1$ और $s_2 = 6t^2 - t^3$ द्वारा दर्शित हैं तो उनका वेग ज्ञात करो जब उनके त्वरण समान है।
- स) यदि प्रसामान्य बंटन का माध्य 40 तथा मानक विचलन 4 हो, तो प्रसामान्य बंटन की $35 < x < 45$ के लिए प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

