

APPLIED MATHEMATICS - III

Time : 2:30 Hours]

[Maximum Marks : 50]

NOTES:

- i) Attempt all questions.
- ii) Students are advised to specially check the Numerical Data of question paper in both versions. If there is any difference in Hindi Translation of any question, the students should answer the question according to the English version.
- iii) Use of Pager and Mobile Phone by the students is not allowed.

Q1) Answer any ten parts of the following, from parts a to e select the correct choice.

[10×1=10]

- a) The rank of $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ is
- i) 1
 - ii) 2
 - iii) 3
 - iv) 0
- b) Every diagonal element of a skew-symmetric matrix is
- i) zero
 - ii) unity
 - iii) non-zero
 - iv) purely imaginary
- c) Mohan is father of 3 children with atleast one boy. The probability that he has 2 boys and 1 girl is
- i) $\frac{1}{2}$
 - ii) $\frac{1}{4}$
 - iii) $\frac{1}{3}$
 - iv) $\frac{2}{3}$
- d) If $u = \sin^{-1} \left[\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right]$, then $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} =$
- i) 1
 - ii) 2
 - iii) 3
 - iv) 0
- e) The degree of the differential equation $\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = x \sin \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)$ is
- i) 2
 - ii) 1
 - iii) 3
 - iv) cannot be defined
- f) Solve : $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$
- g) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, then find the value of curl \vec{r} .
- h) Prove that div $\vec{r} = 3$.
- i) If $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, then find the value of $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$.
- j) Write the relation between Beta and Gamma functions.
- k) Find the value of $L(\sin 2t + t^2)$.
- l) Write the mean and variance of Binomial Distribution.

Q2) Answer any five parts of the following.

- a) Find the characteristic roots of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
- b) Solve : $(x + 2y^3)dy = y dx$.
- c) Determine the constant a so that the vector $\mathbf{V} = (x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+az)\hat{k}$ is solenoidal.
- d) Evaluate : $L\{e^{-t}(3 \sin 2t - 5 \cos 2t)\}$.
- e) Show that an even function can have no sine terms in its Fourier series.
- f) A bag contains 5 red and 3 blue balls. If 3 balls are drawn at random without replacement find the probability of getting exactly one red ball.
- g) Find the unit normal vector to the level surface $x^2y + 2xz = 4$ at the point $(2, -2, 3)$.

Q3) Answer any two parts of the following:

- a) Show that the equations

$$x + y + z = 6,$$

$$x + 2y + 3z = 14,$$

$$x + 4y + 9z = 36$$

are consistent and solve them.

- b) Solve : $(D^2 - 2D + 4)y = e^x \cos x$.

- c) Solve : $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$.

Q4) Answer any two parts of the following:

- a) Evaluate $\int_0^1 x^5(1-x^3)^{10} dx$.

- b) If $u = f(y-z, z-x, x-y)$, then prove that $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

- c) Prove that $\beta(m, n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1)$, $m, n > 0$.

Q5) Answer any two parts of the following:

- a) Find $L^{-1} \frac{6s^2 + 10s + 2}{s^3 + 3s^2 + 2s}$.

- b) Write the fourier sine series of k in $(0, \pi)$.

- c) A manufacturer produces light-bulbs that are packed into boxes of 100. If quality control studies indicate that 0.5% of the light-bulbs produced are defective what percentage of boxes will contain no defective?

नोट : i) सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

- ii) परीक्षार्थियों को सलाह दी जाती है कि वे प्रश्न-पत्र के दोनों अनुवादों में सांख्यकीय आँकड़ों का विशेष रूप से मिलान कर लें। यदि हिन्दी अनुवाद के किसी प्रश्न में किसी प्रकार की भिन्नता है, तो परीक्षार्थी अंग्रेजी अनुवाद के अनुसार प्रश्न का उत्तर दें।

iii) परीक्षार्थियों द्वारा पेज़र और मोबाइल फोन का प्रयोग अनुमत्य नहीं है।

प्र.1) निम्नलिखित में से कोई दस भाग हल कीजिए। भाग ‘अ’ से ‘न’ तक सही विकल्प चुनिये।

$$[10 \times 1 = 10]$$

अ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ मेट्रिक्स का पद है

- i) 1 ii) 2 iii) 3 iv) 0

ब) किसी विषम – सममित आव्यूह का प्रत्येक विकर्णीय अवयव होता है।

i) शून्य ii) ईकाई iii) अशून्य iv) शुद्धतः काल्पनिक

स) मोहन के तीन बच्चे हैं जिसमें कम से कम 1 लड़का है। उसके 2 लड़के एवं 1 लड़की होने की प्रायिकता है

i) $\frac{1}{2}$

ii) $\frac{1}{4}$

iii) $\frac{1}{3}$

iv) $\frac{2}{3}$

द) यदि $u = \sin^{-1} \left[\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right]$ है, तो $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} =$

- 1) 1

- ii) 2

- iii) ~~A~~ 3

- iv) 0

य) अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x \sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ की धात होगी-

- 2

- 1

- iii) 3

- iv) प्राप्त नहीं कर सकते।

$$र) \quad \text{हल कीजिए} - \frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$$

- ल) यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ है, तो $\text{curl } \vec{r}$ का मान ज्ञात कीजिए।

- v) सिद्ध कीजिए : $\operatorname{div} \bar{r} = 3$.

त) यदि $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ हैं तो $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

- थ) बीटा और गामा फलन के बीच संबंध लिखिए।

- ध) $L(\sin 2t + t^2)$ का मान ज्ञात कीजिए।

- न) द्विपद बंटन (Binomial Distribution) का माध्य तथा प्रसरण लिखिए।

प्र.2) निम्नलिखित में से कोई पाँच भाग हल कीजिए :

- अ) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मूल ज्ञात कीजिए।
- ब) हल कीजिए : $(x + 2y^3)dy = y dx$.
- स) अचर a का मान ज्ञात कीजिए, जबकि सदिश $V = (x + 3y)\hat{i} + (y - 2z)\hat{j} + (x + az)\hat{k}$ परिनालिकीय है।
- द) ज्ञात कीजिए : $L\{e^{-t}(3 \sin 2t - 5 \cos 2t)\}$.
- य) सिद्ध कीजिए कि एक सम फलन की फूरियर शृंखला में कोई साइन पद नहीं हो सकता है।
- र) एक थैली में 5 लाल और 3 नीले रंग की गेंद है। यदि बदले बिना तीन गेंद निकाली जाती हैं तो ठीक-ठीक एक लाल रंग का गेंद मिलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
- ल) समतल सतह $x^2y + 2xz = 4$ के बिन्दु $(2, -2, 3)$ पर इकाई लम्ब सदिश ज्ञात कीजिए।

प्र.3) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिए :

[2×5=10]

- अ) सिद्ध कीजिए कि समीकरण
- $$x + y + z = 6,$$
- $$x + 2y + 3z = 14,$$
- $$x + 4y + 9z = 36$$
- सुसंगत हैं और इन्हें हल कीजिए।
- ब) हल कीजिए : $(D^2 - 2D + 4)y = e^x \cos x$.
- स) हल कीजिए : $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$.

प्र.4) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिए :

[2×5=10]

- अ) हल कीजिए : $\int_0^1 x^5 (1 - x^3)^{10} dx$.
- ब) यदि $u = f(y - z, z - x, x - y)$ तो सिद्ध कीजिये $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
- स) सिद्ध करो कि $\beta(m, n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1), m, n > 0$.

प्र.5) निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिए :

[2×5=10]

- अ) ज्ञात कीजिए : $L^{-1} \frac{6s^2 + 10s + 2}{s^3 + 3s^2 + 2s}$.
- ब) $(0, \pi)$ अंतराल में k के लिए फूरियर साइन (sine) शृंखला ज्ञात कीजिए।
- स) एक निर्माता प्रकाश बल्बों का उत्पादन करता है जिन्हें 100 बल्बों में पैक किया जाता है। यदि गुणवत्ता नियंत्रण अध्ययन यह संकेत करता है कि उत्पादित बल्बों में से 0.5% बल्ब खराब हैं। कितने प्रतिशत बल्बों में कोई खराब बल्ब नहीं है?

